פונקציות בעלות השתנות חסומה

# משפט

אם f בעלת השתנות חסומה ב ו, אזי f גם בעלת השתנות חסומה ב. בנוסף לכך אם , אזי

## הוכחה

תהי חלוקה של , ו חלוקה של , ונגדיר , אזי T הינההה חלוקה של ומתקיים , לכן ולכן*נשאר להוכיח ש.*

*עכשיו, תהי T חלוקה של ונסמן , , . אזי:*

*תהי f בעלת השתנות חסומה ב. אזי* הפונקציה מוגדרת עבור , . הינה פונקציה לא יורדת המקבלת ערכים לא שליליים. אם אזי

# משפט

כל פונקציה בעלת השתנות חסומה ב ניתנת להצגה בתור הפרש של שתי פונקציות לא יורדות ב.

## הוכחה

מספיק להוכיח שהפונקציה הינה לא יורדת ב. אמנם, תהי .

# משפט ז'ורדן

פונקציה המוגדרת ב תהיה בעלת השתנות חסומה אם ורק אם היא ניתנת להצגה בתור הפרש של פונקציות לא יורדות ב.

## מסקנה

אם f בעלת השתנות חסומה ב, אזי היא אינטגרבילית שם.

## הוכחה

אם f בעלת השתנות חסומה ב אזי באשר g,h הן פונקציותצ לא יורדות על ולכן אינט' שם. מכאן .

## הערה

אם לf יש אך ורק מספר סופי של נקודות מקסימום ומינימום(מקומיות) ב אזי קל מאוד לחשב את .

# אי שוויון קושי-שוורץ(Schwarz)(-בונוקובסקי)

יהיו ו מספרים ממשיים. אזי  
מתקיים שוויון אם ורק אם הווקטורים אינם בלתי תלויים, ז"א קיימים כך ש לכל

## הוכחה

ברור ש  
*אם מתקיים שוויון, ו, אזי לכל ז"א לכל .*

# הגדרה

נורמה על הינה המקיים

1. לכל
2. אם ורק אם
3. לכל

## נגדיר עבור :

## הערה

לכל מתקיים לכל   
 לכל

נקבע n. סדרה ב מוגדרת ע"י nיות , . במילים אחרות, סדרה היא פונקציה מ אל

נגיד שהסדרה חסומה אם קיים כך ש לכל . הסדרה מתכנסת לגבול אם לכל קיים כך שעבור מתקיים

# משפט

הסדרה מתכנסת ל (=) ב אם ורק אם הסדרות מתכנסות בהתאמה ל, עבור .

## הוכחה

נניח ש כאשר לכל . יהי . אזי קיימים מספרים כך שאם אזי . לכן אם נגדיר ו אזי לכל , בפרט והוכחנו

עכשיו נניח ש ונקבע . יהי . קיים K כך שאם אזי, ז"א . זה נכון לכל וגמרנו.

# משפט

הסדרה ב מתכנסת אם ורק אם היא מקיימת תנאי קושי: לכל קיים כך שאם אזי .

## הוכחה – תרגיל

# משפט בולצנו ווירשטראס

אם חסומה אזי יש לה תת סדרה מתכנסת.

## הוכחה(עבור )

נניח ש חסומה. ז"א שקיים כך ש, לכן ע"פ משפט בולצנו ווירשטראס עבור המיושם לסדרה יש תת סדרה המתכנסת, נגיד ל. כאשר .  
נגדיר . אזי ולכן ע"פ משפט בולצנו ווירשטראס עבור יש תת סדרה של המתכנסת, נגיד ל

טענה:   
שכן ולכן ובנוסף לכך .